

## **CONCEPT DES POINTS DE SINGULARITÉ DU MANIPULATEUR 3RRR PARALLELE**

**Bourama COULIBALY<sup>1\*</sup>, Bernard SIDIBÉ<sup>2</sup> et Kya Abraham BERTHÉ<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> *Centre de recherche et de Formation pour l'Industrie Textile (CERFITEX),  
Département Electricité, Electronique et Automatique (EEA), Ségou, Mali*

<sup>2</sup> *Ecole Nationale d'Ingénieurs, Département de Génie Industriel, Bamako, Mali*

<sup>3</sup> *Université des sciences techniques et technologiques, Faculté des Sciences  
Techniques, Département physique, Bamako, Mali*

---

\* Correspondance, e-mail : [bcoulibaly28@yahoo.fr](mailto:bcoulibaly28@yahoo.fr)

### **RÉSUMÉ**

Dans le domaine de la robotique, les robots parallèles sont contraints à des tâches très spécifiques en comparaison avec leurs homologues sériels à cause de leur espace de travail plus restreint. L'objet de cette étude est de présenter une architecture de robot 3RRR parallèle lors de la traversée du point de singularité, pour mettre en évidence le concept du point de singularité. La méthode de la géométrie inverse a été utilisée pour modéliser le manipulateur 3RRR parallèle. Cette méthode a permis de modéliser le robot sous forme des équations mathématiques en fonction des coordonnées des points d'ancrage  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et l'angle  $\theta_i$ . Ces équations ainsi obtenues sont simulées sur le logiciel Octave, pour déterminer les différents parcours du robot et les points de singularités. L'ensemble des parcours obtenus après la simulation sur le logiciel de calcul Matlab Simulink, est en fonction de la plateforme mobile ou l'effecteur, qui se déplace entre les deux coordonnées cartésiennes  $P_1(6,5)$  et  $P_2(16,15)$ . Le point de singularité  $P(16.5, 15)$  déterminé par le logiciel Octave, se trouve dans l'espace de travail du manipulateur 3RRR parallèle (entre les deux coordonnées cartésiennes  $P_1(6,5)$  et  $P_2(16,15)$ ). Cette étude a permis de mettre en évidence l'influence des points de singularités sur le manipulateur 3RRR parallèle dans son espace de travail.

**Mots-clés :** *manipulateur 3RRR parallèle, point de singularité, géométrie inverse, octave.*

**ABSTRACT**

In the field of robotics, parallel robots are constrained to very specific tasks in comparison with their serial counterparts because of their narrower workspace. The purpose of this study is to present a parallel 3RRR robot architecture during the crossing of the point of singularity, to highlight the concept of the point of singularity. The inverse geometry method was used to model the parallel 3RRR manipulator. This method made it possible to model the robot in the form of mathematical equations according to the coordinates of the anchor points  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  and the angle  $\theta_i$ . These equations thus obtained are simulated on the Octave software, to determine the different paths of the robot and the points of singularities. The set of paths obtained after the simulation on the Matlab Simulink calculation software is based on the mobile platform or the effector, which moves between the two Cartesian coordinates P1 (6, 5) and P2 (16,15). . The singularity point P (16.5, 15) determined by the Octave software, is in the working space of the parallel 3RRR manipulator (between the two cartesian coordinates P1 (6, 5) and P2 (16, 15)). has made it possible to highlight the influence of the points of singularities on the parallel 3RRR manipulator in its workspace.

**Keyword :** *3RRR parallel manipulator, singularity point, inverse geometry, octave.*

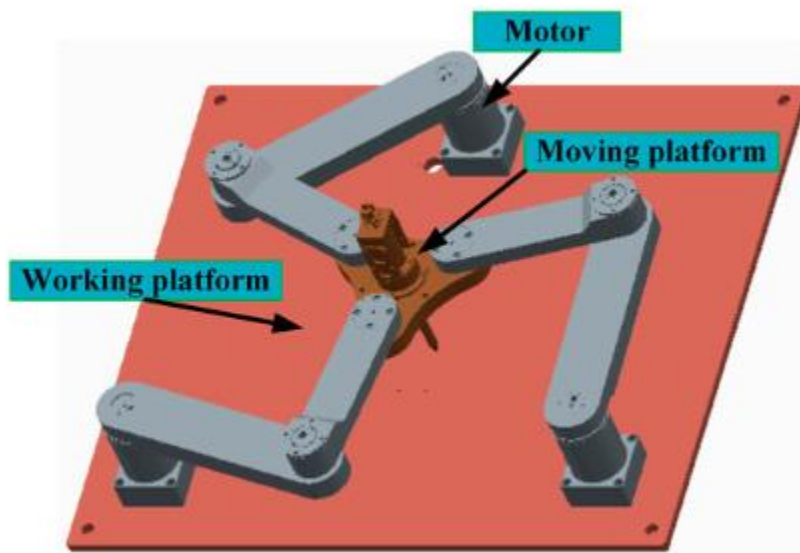
**I - INTRODUCTION**

Dans le contexte des robots sériels ou parallèles, le point de singularité est un état du robot dans lequel le contrôle de ce dernier ne peut être assuré correctement. Il existe trois types de singularité :

- ✓ Les singularités de type I : Ils se traduisent par des positions extrêmes de fonctionnement des actionneurs et sont solutionnés par l'utilisation des capteurs de fin de course dans cet article [1].
- ✓ Les singularités de type II : Dans ce cas le degré de liberté est déterminé par un autre facteur que l'architecture des liaisons du système. Le poids propre de l'effecteur par exemple, qui n'est plus compensé suivant sa direction. Ce type de singularité est donc le plus préjudiciable au pilotage du robot dans notre cas [2].
- ✓ Les singularités de type III : Ils ne sont pas en général atteignables qu'en construisant le robot de façon très particulière. Ce type de singularité est rare donc pas traité dans cet article [3].

Le Robot 3RRR parallèle est utilisé dans différentes industries comme un robot parallèle. C'est un mécanisme en chaîne cinématique fermée, constitué d'un organe terminal à  $n$  degrés de libertés et d'une base fixe, reliés entre eux

par des chaînes cinématiques indépendantes. [4].il est indispensable pour obtenir le résultat correct et précis [5]. L'espace de travail d'un robot parallèle dépend des différentes chaînes cinématiques indépendantes qui relient la base à l'effecteur (plate-forme mobile) [6]. Le robot 3RRR parallèle est constitué de trois bras. Chaque bras a deux liaisons, une liaison active et une liaison passive. Cet ensemble de liaisons rend le système assez précis. En conséquence, l'espace de travail d'un robot parallèle est réduit en raison des différentes contraintes imposées par les chaînes cinématiques qui relient la base du robot à la plate-forme mobile de ce dernier [7]. Un autre inconvénient dû aux contraintes des différentes jambes est l'existence de singularités. Les points de singularités sont les points où le mécanisme parallèle perd sa rigidité naturelle et voit l'organe terminal perdre ou gagner des degrés de libertés rendant la plate-forme ou l'effecteur mobile incontrôlable [8]. Ces particularités du robot sont donc d'un intérêt primordial pour le contrôle du robot, surtout dans les cas des robotiques chirurgicales ou les mécanismes nécessitant une très forte précision [9]. L'architecture minimale pour un robot 3RRR parallèle nécessite trois actionneurs pour piloter les trois rotations principales dans l'espace cartésien [10]. Une donnée importante pour un robot est l'expression des valeurs que doivent prendre les actionneurs contrôlés pour atteindre la configuration recherchée. Cette information est appelée le Problème Géométrique, elle donne le lien entre les grandeurs contrôlées par les actionneurs appelées coordonnées articulaires et les grandeurs d'états du robot que nous souhaitons contrôler appelées coordonnées cartésiennes [11]



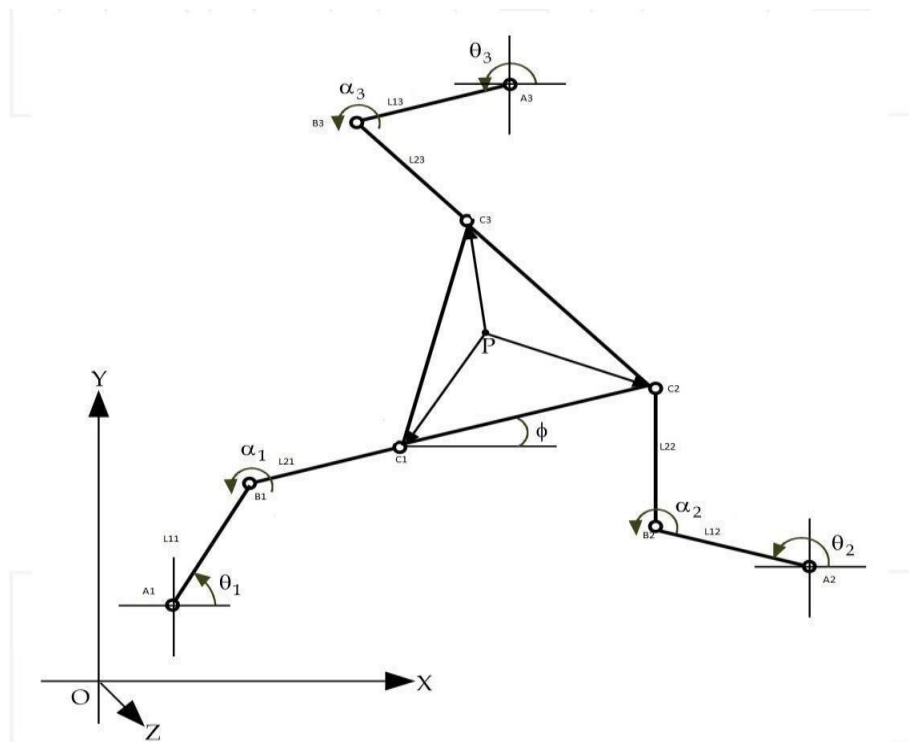
**Figure 1 :** Architecture d'un robot 3RRR Parallèle [12]

Dans cet article nous avons commencé par une méthodologie, qui décrit la description géométrique la modélisation du manipulateur ; ensuite les résultats obtenus par la simulation sont présentés et discutés et enfin la conclusion.

## II - MÉTHODOLOGIE

### II-1. Description Géométrique du manipulateur 3RRR

Les angles  $\alpha_i$  et  $\theta_i$  définissent la position angulaire des segments de la jambe  $i$ ,  $i \in [1 - 3]$ , qui dépendent de la position relative des points d'ancrages  $A_i$ ,  $B_i$ , et  $C_i$ , illustré sur la **Figure 1**. Afin de simplifier, la résolution, on se place dans le repère fixe d'origine  $O$ . L'axe de ce repère est porté par l'axe de rotation de la liaison pivot de centre  $A_i$ . Les coordonnées cartésiennes des points  $C_i$  sont connues, car ces points sont liés à l'effecteur dont l'orientation est connue, mais est exprimé dans le repère  $(x, y, z)$  de l'origine  $C_1$  illustré sur la **Figure 1**. Il faut donc exprimer les coordonnées  $C_i$  dans ce repère, ce qui est obtenu par une rotation d'angle  $\Phi$  autour de l'axe  $x$  [13].



**Figure 2** : Représentation géométrique du robot 3RRR [14]

Les lignes  $C_1P$ ,  $C_2P$  et  $C_3P$  sont respectivement représentées par  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$ . Les  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $\gamma_3$  illustrent respectivement les angles formés par  $BPC_1$ ,  $BPC_2$  et  $BPC_3$ . De plus les lignes  $AB$  et  $C_1C_2$  sont parallèles. Les coordonnées cartésiennes de  $P$  ( $X_{Ef}$ ,  $Y_{Ef}$ ) représentent la position de l'effecteur dans le repère  $(x, y, z)$  lié à l'effecteur [14].

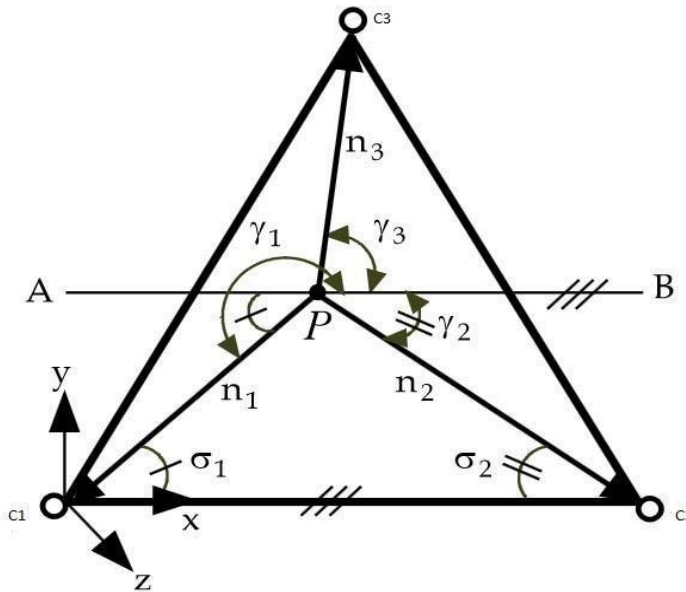


Figure 3 : Effecteur [14]

## II-2. Modélisation du robot 3RRR parallèle par la Géométrie Inverse

Cette méthode est basée sur la convention de Denavit et Hartenberg (DH 1955). Elle permet le passage entre articulations adjacentes d'un système robotique. Elle concerne les chaînes cinématiques ouvertes où l'articulation possède uniquement un degré de liberté, et les surfaces adjacentes restent en contact. Pour cet aspect l'utilisation des charnières ou des glissières est indispensable. Le choix adéquat des repères dans les liaisons facilite le calcul des matrices et permet d'arriver à exprimer rapidement des informations de l'élément terminal vers la base ou l'inverse [15]. A partir de la **Figure 2** nous pouvons écrire l'**Équation** suivante :

$$OA_i + A_i C_i = OP + PC_i \quad (1)$$

Pour  $i = 1, 2$  et  $3$ , nous pouvons ainsi écrire les deux matrices de transformations suivantes :

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & o_{xi} \\ 0 & 1 & 0 & o_{yi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & 0 & 0 \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 & L_{1i} \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{2i} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \alpha_i) & -\sin(\theta_i + \alpha_i) & 0 & o_{xi} + L_{2i}\cos(\theta_i + \alpha_i) + L_{1i}\cos\theta_i \\ \sin(\theta_i + \alpha_i) & \cos(\theta_i + \alpha_i) & 0 & o_{yi} + L_{2i}\sin(\theta_i + \alpha_i) + L_{1i}\sin\theta_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_{xp} \\ 0 & 1 & 0 & P_{yp} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\gamma_i + \phi) & -\sin(\gamma_i + \phi) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma_i + \phi) & \cos(\gamma_i + \phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & m_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les coordonnées cartésiennes  $P (P_{XF}, P_{YF})$  correspondent à la position de l'effecteur dans le repère fixe. De plus  $(X_i, Y_i, Z_i)$  les deux matrices sont égales donc l'Équation devient :

$$\begin{bmatrix} L_{2i}\cos(\theta_i + \alpha_i) \\ L_{2i}\sin(\theta_i + \alpha_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{xp} + b_{xi}\cos\phi - o_{xi} - L_{1i}\cos\theta_i \\ P_{yp} + b_{yi}\sin\phi + b_{xi}\cos\phi - o_{yi} - L_{1i}\sin\theta_i \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Avec } b_{xi}=n_i\cos\gamma_i \text{ et } b_{yi}=n_i\sin\gamma_i \quad (5)$$

En faisant la somme au carré des deux lignes de l'Équation (4) nous obtenons facilement après simplification l'équation suivante :

$$L_{2i}^2 - 2P_{yp} o_{yi} - 2P_{xp} o_{xi} + b_{xi}^2 + b_{yi}^2 + o_{xi}^2 + o_{yi}^2 + P_{xp}^2 + P_{yp}^2 + 2L_{1i} b_{yi}[\sin(\phi - \theta_i) - \cos(\phi - \theta_i)] + 2\cos\phi (P_{xp} b_{xi} + P_{yp} b_{yi} - b_{xi} o_{xi} - b_{yi} o_{yi}) + 2\sin(\phi) (P_{yp} b_{xi} - P_{xp} b_{yi} - b_{yi} o_{yi} + b_{xi} o_{xi}) + 2L_{1i} \cdot \cos\theta_i (o_{xi} - P_{xp}) + 2L_{1i} \cdot \sin\theta_i (o_{yi} - P_{yp}) - L_{2i}^2 = 0 \quad (6)$$

Pour le calcul du modèle géométrique inverse l'Équation 6 peut s'écrire sous la forme :

$$A_i \sin \Theta_i + B_i \cos \Theta_i = C_i \tag{7}$$

Avec :

$$A_i = 2L_i l_i (o_{yi} - b_{xi} * \sin(\phi) - b_{yi} * \cos(\phi) + P_{Yp}) \tag{8}$$

$$B_i = 2L_i l_i (o_{xi} - b_{yi} * \sin(\phi) - b_{xi} * \cos(\phi) + P_{Xp}) \tag{9}$$

$$C_i = - [L_2 l_i - 2P_{Yp} o_{yi} - 2P_{Xp} o_{xi} + b_2 X_i + b_2 Y_i + o_2 x_i + o_2 y_i + P_2 X_p + P_2 Y_p - L_2 l_i + 2 * \cos \phi (P_{Xp} b_{xi} + P_{Yp} b_{yi} - b_{xi} o_{xi} - b_{yi} o_{yi}) + 2 \sin(\phi) (P_{Yp} b_{xi} - P_{Xp} b_{yi} - b_{yi} o_{yi} + b_{yi} o_{xi})] \tag{10}$$

$$\Theta_i = \text{Atan2}(A_i, B_i) \pm \text{Atan2}(\sqrt{A_i^2 + B_i^2} + C_i^2, C_i) \tag{11}$$

**L'Équation 11** présente deux solutions possibles pour chaque bras donc nous avons alors huit (8) solutions possibles pour le robot 3RRR. La rotation des joints actifs et passifs est obtenue par des équations théoriques ci-dessus. Ainsi nous pouvons passer à la simulation sur le logiciel octave.

### II-3. Simulation

Ce programme comprend plusieurs scripts MATLAB utilisés pour la simulation des manipulatrices parallèles planaires 3-RRR. Le programme consiste de définir de manière interactive la position et l'orientation de la plate-forme mobile. À chaque changement de pose, le problème cinématique inverse est résolu et la nouvelle configuration est tracée. De plus, à chaque changement d'orientation de la plate-forme mobile, l'espace de travail d'orientation constante est calculé et tracé. Les paramètres du manipulateur 3RRR sont prédéfinis par la méthode de la géométrie inverse.

#### ✓ Les Paramètres du robot 3RRR

Longueur des bras :

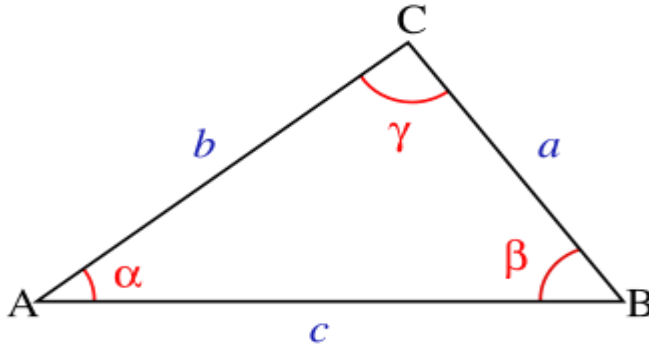
$$l_{1i} = 7.2\text{cm} \quad l_{2i} = 9.6\text{cm}$$

Pour le calcul de paramètres de triangle, nous avons utilisé la loi de sinus [2] :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Et la loi de cosinus :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



✓ **Coordonnée d'origine**

$o_{x1} = 0$  cm,  $o_{x2} = 24.3$ cm,  $o_{x3} = 1.903510807$ cm;  $o_{y1} = 0$  cm,  
 $o_{y2} = 0$  cm,  $o_{y3} = 24.09994339$  cm,

✓ **Paramètre du triangle**

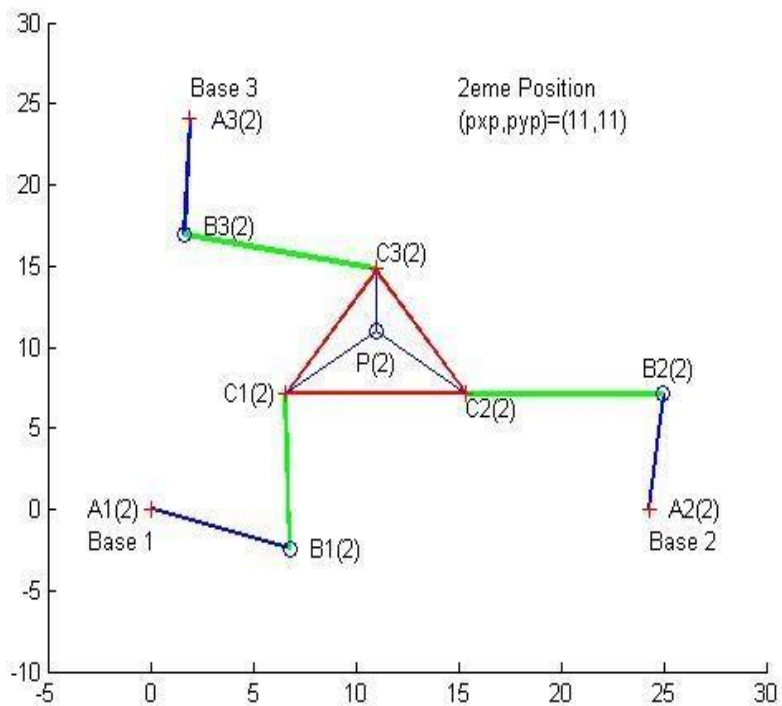
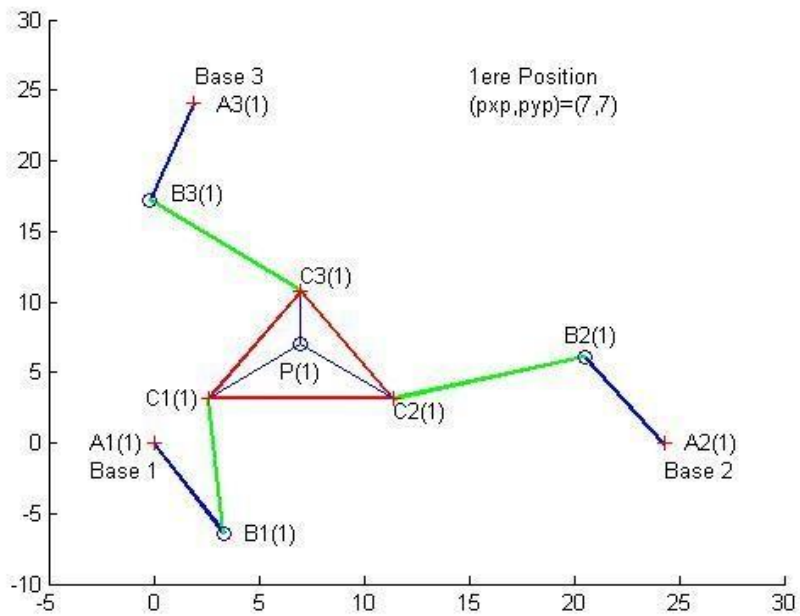
$n1 = 5.820652885$  cm,  $n2 = 5.820652885$  cm,  $n3 = 3.810511777$  cm ;  
 $\gamma_1 = 220.8933947$  degré,  $\gamma_2 = -40.933947$  degré,  $\gamma_3 = 90$  degré ;  
 $\Phi = 0$  degré;

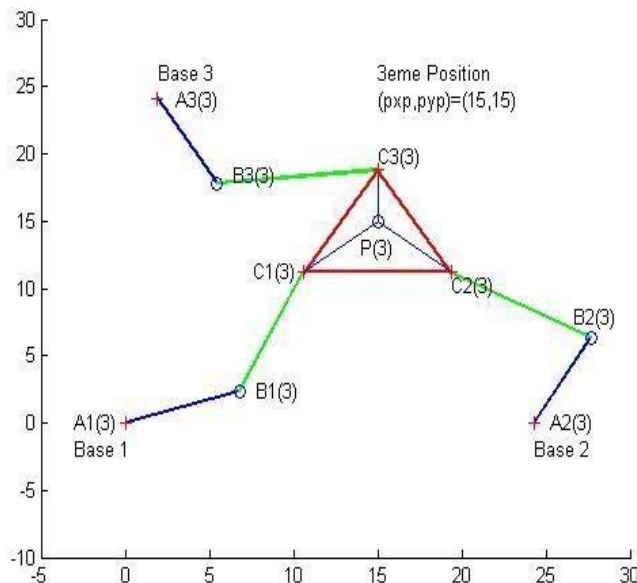
### III - RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### III-1. Parcours du Manipulateur 3RRR parallèle

L'ensemble des parcours du manipulateur après la simulation sur le logiciel Octave est déterminé. Les différents déplacements possibles de la plateforme mobile sont déterminés. Par exemple une simulation des trois déplacements de la plateforme mobile du robot est représentée ci-dessous :







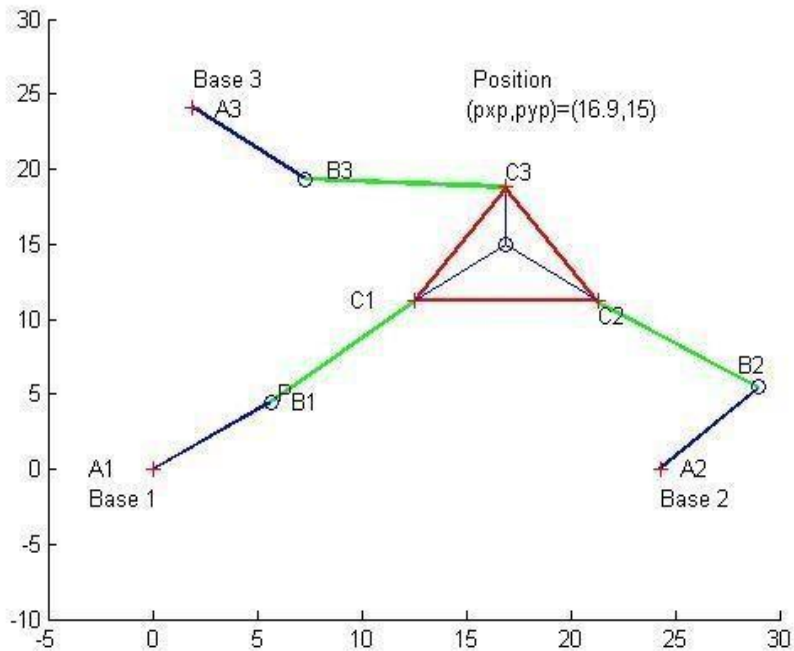
Ainsi, nous pouvons donc déterminer l'espace de travail du manipulateur 3RRR parallèle en fonction de coordonnées cartésiennes de l'effecteur ou de la plateforme mobile. L'espace de travail se trouve entre les deux coordonnées cartésiennes de l'effecteur (seuil de départ et seuil d'arrivée) du **Tableau 1**.

**Tableau 1 :** Déplacements possibles du manipulateur

Cordonnée de départ	Cordonnée d'arrivée
(6 ,5)	(16,15)

### III-2. Singularité du robot 3RRR parallèle

Nous avons simulé notre robot pour déterminer l'ensemble des parcours possibles, afin de déterminer le point de singularité de type I et II. Dans le **Tableau 1** ci-dessus, qui représente l'ensemble des parcours possibles de la plateforme mobile ou l'effecteur entre les deux coordonnées cartésiennes  $P_1 (6 ,5)$  et  $P_2 (16, 15)$ . Entre ces deux coordonnées, il existe plusieurs déplacements possibles du manipulateur. Mais tous ces déplacements n'assurent pas un bon parcours du manipulateur à cause des points de singularités, c'est-à-dire, on perd un degré de liberté. Comme le point  $P (16.5, 15)$  illustré par la **Figure 6** suivante.



**Figure 6 :** *Position de singularité*

Nous observons clairement que la liaison active sur la base 1 a perdu son degré de liberté, donc, c'est bien un point de singularité. Il provoque une perte de contrôle du manipulateur donc n'assure pas un bon parcours du manipulateur 3RRR.

## V - CONCLUSION

Des relations matricielles complètes du robot 3RRR parallèle ont été établies par la méthode de la géométrie inverse. Trois jambes planes identiques se connectant à la plateforme en mouvement sont situées dans le même plan. Connaissant le mouvement de la plateforme, nous avons déterminé l'espace de travail du robot et les points de singularités. Les points de singularités réduisent donc l'espace de travail du manipulateur prédéfinis. Rendant ainsi difficile la maîtrise du manipulateur sur l'ensemble des parcours possibles décrits sur le **Tableau 1**. Cependant il est possible de maîtriser la trajectoire du manipulateur en évitant les points de singularités lors de ces déplacements. En résolvant le problème de singularité du manipulateur 3RRR parallèle, le système devient une réponse aux nouvelles contraintes de rapidité, productivité et agilité dans les industries.

## RÉFÉRENCES

- [1] - X. K., CLEMENT M. GOSELIN et JAMES M. RITCHIE, Forward displacement analysis of a linearly actuated quadratic spherical parallel manipulator. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 3(12) (January 2011)
- [2] - J. W. et CLÉMENT M. GOSELIN, Singularity loci of a special class of spherical 3-DOF parallel mechanisms with prismatic actuators. *Journal of Mechanical Design*, 126 (March 2004) 319 - 326
- [3] - C. M. G., THIERRY LALIBERTÉ et AUDREY VEILLETTE. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with unlimited rotational capability. *IEEE Transactions on Robotics*, 31(2) (2015)457 - 467
- [4] - J. S., et CLEMENT M. GOSELIN, Étude et représentation des lieux de singularité des manipulateurs parallèles sphériques à trois degrés de liberté avec actionneurs prismatiques. *Mechanism and Machine Theory*, 29(4) (1994) 559 - 579
- [5] - J. Y., DENG FENG LU et GUANGBO HAO, Design and analysis of a 2-DOF compliant parallel pan-tilt platform. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators* (2014)
- [6] - H. S., LIANGJIE YANG, JIANGMING, JU LI, XIAOYU ZHANG, A parallel shoulder rehabilitation training mechanism and its kinematics design. In *Third International Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators* (2014)
- [7] - C. M. G. et Louis-Thomas Schreiber. Kinematically redundant spatial parallel mechanisms for singularity avoidance and large orientational workspace. *IEEE Transactions on Robotics*, 2(32) (2016) 286 - 300
- [8] - G. W., STEPHANE CARO et JIAWEI WANG, Design and transmission analysis of an asymmetrical spherical parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, (94) (2015) 119 - 131
- [9] - CHEN WENJIA et al., "A novel 4-DOF parallel manipulator and its kinematic modeling." Proceedings of the 2000 IEEE conference on robotics and automation
- [10] - Xin-JUN LIU and JONGWON KIM " A new three-degree-of-freedom of parallel manipulator." Proceedings of the 2002 IEEE conference on robotics and automation
- [11] - X. J. LIU and J. KIM "A new three-degree-of-freedom parallel manipulator" Proceedings of the 2002 IEEE conference on robotics and automation (2002)
- [12] - LIA CHAO SHENG and WEI LI, (Optimization Design by Genetic Algorithm Controller for Trajectory Control of a 3-RRR Parallel Robot)
- [13] - P. BEN HORIN, S. DJERASSI, M. SHOHAM and R. BEN HORIN "Dynamics of six degrees-of-freedom parallel robot actuated by three two wheel cart" *Multibody syst Dyn* (2006)
- [14] - Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (2010)
- [15] - J-P. MERLET, *Parallel Robots*. Springer, (2006) (Cité pages 3 et 17)