ISSN 1813-3290

APPROXIMATION POINT PAR POINT POUR LA RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN DISQUE POUR L'ÉQUATION ELLIPTIQUE DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS DANS LE CAS OÙ LES RACINES DE L'ÉQUATION CARACTÉRISTISQUE SONT IDENTIQUES

Ayékotan M. J. TCHALLA* **et Kokou TCHARIE**

Université de Lomé, Département de Mathématiques, B.P.1515 Lomé, Togo.

(Reçu le 16 Mars 2011, accepté le 22 Juin 2011)

* Correspondance et tirés à part, e-mail : ayekotant@yahoo.fr

RÉSUMÉ

Dans le disque unité de l'espace R^2, on établit une nouvelle estimation a posteriori point par point de l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique du second ordre a coefficients constants lorsque les racines de l'équation caractéristique sont identiques.

Mots-clés : *Equation elliptique, problème de Dirichlet, estimation à postériori point par point de l'erreur*

ABSTRACT

Point-wise approximations to the solution of the Dirichlet problem in a circle for the elliptic second order equation with constant coefficients when the roots of the characteristic equation are equal

In the unit circle of R^2, we establish new posteriori error estimation of the approximated solution in each fixed point for the Dirichlet problem for the elliptic second order equation with constant coefficients when the roots of the characteristic equation are equal.

Keywords : *Elliptic equation, Dirichlet's problem, posterior point-wise error estimation*

1 – TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Dans le présent travail, nous utiliserons les termes et notations qui suiventΩ, un domaine borné de R^2, et ses éléments sont notés : $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

$L^2(\Omega)$: espace de Banach des fonctions à carré intégrable (selon Lebesgue) sur Ω dont la norme est définie par :

$$||u||_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \forall u \in L^2(\Omega),$$

et le produit scalaire est noté $(.,.)_2$.

$C^k(\bar{\Omega})$: ensemble des fonctions k-fois continûment différentiables sur l'adhérence $\bar{\Omega}$ de Ω.

$C_c^\infty(\Omega)$: ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω.

$W_2^1(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre 1 constitué des éléments de $L^2(\Omega)$ admettant toutes les dérivées partielles d'ordre 1 au sens des distributions dans $L^2(\Omega)$. C'est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u,v)_{2,1} = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx$$

et la norme est définie par $||u||_{2,1} = \sqrt{(u,u)_{2,1}}$.

$\dot{W}_2^1(\Omega)$: adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W_2^1(\Omega)$.

$W_2^2(\Omega)$: espace de Sobolev d'ordre 2 formé des éléments de $L^2(\Omega)$ admettant des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 au sens des distributions dans $L^2(\Omega)$. Le produit scalaire dans cet espace qui est un hilbertien est défini par :

$$(u,v)_{2,2} = \int_\Omega \left(u(x)v(x) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}\right) dx$$

et la norme est définie par $||u||_{2,2} = \sqrt{(u,u)_{2,2}}$.

$W_{2,0}^2(\Omega)$: adhérence dans $W_2^2(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions de $C^2(\overline{\Omega})$ qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω.

On note $\quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

2 Introduction

Les problèmes de la physique mathématique, de la théorie de l'élasticité, de l'hydrodynamique et autres se ramènent plus souvent aux Équations aux Dérivées Partielles (E.D.P) qu' aux Équations Différentielles Ordinaires (E.D.O). Pour la résolution de ces problèmes, il serait plus intéressant d'utiliser les méthodes communément appelées méthodes directes. Mais très souvent il est difficile voir impossible dans certains cas de déterminer la solution exacte de la plus part des E.D.P par ces méthodes directes. C'est pour cela qu'on fait souvent recours aux méthodes approximatives pour résoudre ces types d'équations. C'est le cas du présent travail qui se penche sur la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique du second ordre à cœfficients constants. Ce travail consiste précisement à étudier l'approximation point par point de l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet dans le disque unité pour l'équation elliptique du second ordre à cœfficients constants dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont identiques. Il s'agit du problème

$$(1) \quad L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + g\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0 u = f(x_1, x_2)$$

$$(2) \quad u_{|\Gamma} = 0,$$

où Γ est la frontière du disque unité $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$, $a,\ b,\ c,\ d,\ g,\ et\ \ a_0$ sont des constantes réelles données et f une fonction à carré intégrable sur Ω.

Dans un premier temps nous allons poser le problème, ensuite établir l'estimation a postériori point par point de l'erreur de sa solution approchée.

3 Position du problème.

Dans le disque unité $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de l'espace $\mathbb{R}^2$, on considère l'équation aux dérivées partielles linéaires à cœfficients constants du second ordre de type elliptique :

$$(3) \quad L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + g\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0 u = f(x_1, x_2)$$

où les cœfficients a, b, c, d, g, a_0 sont des constantes réelles données, et f une fonction à carré intégrable sur Ω.

À l'équation (3), on associe la condition de Dirichlet :

$$(4) \qquad u\big|_{\Gamma} = 0.$$

où $\Gamma = \partial\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ est la frontière de Ω.

Définition 1 (Solution classique)
On appelle solution classique du problème (3)-(4), *la fonction* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *vérifiant l'équation* (3)- (4).

Définition 2 (Solution généralisée)
On appelle solution généralisée du problème (3) - (4), *la fonction* u *de* $\dot{W}_2^1(\Omega)$ *vérifiant l'égalité suivante pour tout* $w \in \dot{W}_2^1(\Omega)$:

$$(5) \quad \int_\Omega \left(a\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_1} + b\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_1}\right) + c\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x_2} - d\frac{\partial u}{\partial x_1}\overline{w} \right.$$
$$\left. - g\frac{\partial u}{\partial x_2}\overline{w} - a_0 u\overline{w} \right) dx_1 dx_2 = -\int_\Omega f\overline{w}\, dx_1 dx_2.$$

Toute solution classique du problème (3)-(4) *est solution généralisée de* (3)-(4).
Toute solution généralisée du problème (3)-(4) *appartient à* $W_{2,0}^2(\Omega) \subset W_2^2(\Omega)$ *et par conséquent, d'après le théorème d'injection de Sobolev, elle est continue sur* $\overline{\Omega}$.

Effectuons le changement de variable suivant :

$$(6) \qquad u(x_1, x_2) = v\,(x_1, x_2) \exp\left[\frac{1}{2}\frac{(cd - bg)}{b^2 - ac}x_1 - \frac{1}{2}\frac{(bd - ag)}{b^2 - ac}x_2\right].$$

En introduisant l'expression (6) dans (3) nous obtenons alors l'équation différentielle d'inconnu v :

$$(7) \qquad a\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \alpha v = R(x_1, x_2)$$

où

$$\alpha = \frac{4a_0(b^2 - ac) + cd^2 - 2bdg + ag^2}{4(b^2 - ac)}$$

$$et \qquad R(x_1, x_2) = \exp\left(\frac{-dcx_1 + bgx_1 + dbx_2 - agx_2}{2\,(b^2 - ac)}\right) f(x_1, x_2).$$

Transformons l'équation (7) sous forme canonique. Pour cela il est nécessaire de réduire à la forme canonique la matrice des cœfficients supérieurs de l'équation (7),

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique et donc ses valeurs propres sont réelles et sont les racines de l'équation caractéristique du second degré

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

Ces racines sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{4b^2 + (a-c)^2} + c); \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(a - \sqrt{4b^2 + (a-c)^2} + c).$$

Dans le présent travail nous étudions le problème ainsi posé au cas où les racines de l'équation caractéristique sont identiques. On remarque facilement que $\lambda_1 = \lambda_2$ si et seulement si $b = 0$ et $a = c > 0$.

Dans ces conditions, l'équation (7) prend alors la forme canonique :

$$L_0(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \left(\frac{a_0}{a} - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{g^2}{4a^2}\right) v = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) f(x_1, x_2).$$

La condition au bord $u_{|\Gamma} = 0$ équivaut à la condition $v_{|\Gamma} = 0$. Ainsi, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, le problème (3) - (4) pour la condition homogène de Dirichlet est alors équivalent à un autre problème de Dirichlet dont l'inconnue v vérifie

$$(8) \qquad L_0(v) = \Delta v + kv = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) f(x_1, x_2)$$

$$(9) \qquad v\Big|_{\Gamma} = 0.$$

où $k = \left(\frac{a_0}{a} - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{g^2}{4a^2}\right)$.

Le but de notre travail est de déterminer par la méthode d'approximation point par point, à l'aide du problème de Dirichlet (8)-(9), l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet (3)-(4) pour l'équation linéaire de type elliptique du second ordre à cœfficients constants, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$. C'est une nouvelle approche qui nous ouvre la possibilité d'aller plus loin dans la résolution de ce problème.

4 Approximation point par point de l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique du second ordre à cœfficients constants

4.1 Introduction

On considère, dans le disque unité $\Omega = \{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de frontière Γ, le problème de Dirichlet pour l'équation aux dérivées partielles linéaire elliptique du second ordre à cœfficients constants :

$$(10)\quad L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + g\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0 u = f(x_1, x_2)$$

$$(11)\quad u\Big|_{\Gamma} = 0.$$

À l'aide du problème auxiliaire équivalent

$$(12)\qquad L_0(v) = \Delta v + kv = \frac{1}{a}\exp\left(\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) f(x_1, x_2)$$

$$(13)\qquad v\Big|_{\Gamma} = 0,$$

avec $k = \left(\frac{a_0}{a} - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{g^2}{4a^2}\right)$,

nous allons établir l'estimation a postériori point par point de l'erreur de la solution approchée du problème (10)-(11) lorsque $b = 0$ et $a = c$.

4.2 Estimation a postériori point par point de l'erreur de la solution approchée du problème posé.

Théorème 1

Supposons $b = 0$, $a = c > 0$ *et* $f \in L^2(\Omega)$.

Si le nombre réel $-k = -\left(\frac{a_0}{a} - \frac{d^2}{4a^2} - \frac{g^2}{4a^2}\right)$, *n'est pas valeur propre du problème*

$$\Delta v = \lambda v \tag{14}$$

$$v\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{15}$$

alors l'unique solution généralisée u *du problème* (10)-(11) *appartient à l'espace* $W^2_{2,0}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ *et pour toute solution approchée* $u^*(x_1, x_2)$ *appartenant à* $W^2_{2,0}(\Omega)$ *en tout point* $x = (x_1, x_2)$ *de* Ω, *on a l'estimation a postériori suivante :*

(16)

$$|u(x_1, x_2) - u^*(x_1, x_2)| \leqslant \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) \| G_{L_0}(x, .) \|_2$$
$$\times \sqrt{\int_{\Omega} \left| \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1, \xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1, \xi_2) \right|^2 d\xi_1 d\xi_2}.$$

avec

$$v^*(x_1, x_2) = u^*(x_1, x_2) \exp\left(\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right).$$

G_{L_0} *représente la fonction de Green de l'opérateur* L_0.

Preuve :

Rappelons que le problème (12)-(13) s'écrit

$$\begin{cases} L_0(v) = \Delta v + kv = F \\ v\Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases}$$

avec

$$F(x_1, x_2) = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) f(x_1, x_2).$$

Pour établir le résultat de ce théorème nous allons appliquer le procédé de démonstration utilisé dans [8] (Page 343 et Page 347).
Si le nombre réel $-k$ n'est pas valeur propre du problème (14)-(15), alors le réel zéro n'est pas valeur propre de l'opérateur L_0 du problème (12)-(13). Ainsi l'opérateur L_0 réalise un homéomorphisme d'espace de $W^2_{2,0}(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$ et l'unique solution généralisée v du problème (12)-(13) appartient à $W^2_{2,0}(\Omega)$ et on a

$$\forall x \in \Omega, \;\; v(x) = L_0^{-1}(F) = \int_\Omega G_{L_0}(x,\xi)F(\xi)d\xi$$

car $F \in L^2(\Omega)$ puisque $f \in L^2(\Omega)$ (voir [8] page 343 et les lemmes 1 et 2 de [8] pages 339 et 340).
L_0 étant linéaire on a :

$$\forall v^* \in W^2_{2,0}(\Omega), \;\; L_0(v - v^*) = F - L_0(v^*).$$

Ainsi

$$v - v^* = L_0^{-1}(F - L_0(v^*)),$$

soit

$$v(x) - v^*(x) = \int_\Omega G_{L_0}(x,\xi)[F(\xi) - L_0(v^*)(\xi)]d\xi.$$

Par suite nous avons

$$v(x) - v^*(x) = \int_\Omega G_{L_0}(x,\xi_1,\xi_2)\left[\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1,\xi_2)\right] d\xi_1 d\xi_2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2) - u^*(x_1,x_2) = & \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right)\int_\Omega G_{L_0}(x,\xi_1,\xi_2) \\ & \left[\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1,\xi_2)\right] d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à cette dernière égalité on a :

$$\begin{aligned} |u(x_1,x_2) - u^*(x_1,x_2)| \leqslant & \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right)\int_\Omega \Bigg| G_{L_0}(x,\xi_1,\xi_2) \\ & \times \left[\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1,\xi_2)\right]\Bigg| d\xi_1 d\xi_2 \\ \leqslant & \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right)\|G_{L_0}(x,.)\|_2 \\ & \times \sqrt{\int_\Omega \left|\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1,\xi_2)\right|^2 d\xi_1 d\xi_2}. \end{aligned}$$

D'où le résultat du théorème 1.

Corollaire 1

Soit $k \leqslant 0$. Les conditions du théorème 1 étant toujours satisfaites, l'estimation a postériori point par point suivante est vérifiée :

$$|u(x) - u^*(x)| \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) \left[2 + 4\ln(2)^2 + 4|x|\,(3 + \ln(4))\right.$$
$$+ \ln(16) - |x|^2 \left(6 + \ln\left(\frac{16}{|x|}\right)\right) \ln(|x|^2) + 2(-1 + |x|)(1 + \ln(4)$$
$$\left. + |x|(3 + \ln(4))) \ln(-1 + |x|)^2) - (-1 + |x|^2) \ln((-1 + |x|)^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\times \sqrt{\int_\Omega \left|\frac{1}{a} \exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1, \xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1, \xi_2)\right|^2 d\xi_2 d\xi_1}.$$

Preuve

Nous allons utiliser l'inégalité $\|G_{L_0}(x,.)\|_2 \leqslant \|G_\Delta(x,.)\|_2$ qui est vérifiée si $k \leqslant 0$. Cette inégalité découle de la propriété du minimax des valeurs propres pour le problème aux limites (12)-(13)(voir, pour exemple ,[5], théorème 1.4,P.186,187). $G_\Delta(x, y)$ est la fonction de Green du problème de Dirichlet pour le laplacien.

$$G_\Delta(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|x| \left|y - \frac{1}{|x|^2} x\right|}{|x - y|}$$

Dès lors l'inégalité (16) peut être substituée à l'inégalité

$$|u(x_1, x_2) - u^*(x_1, x_2)| \leqslant \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) \|G_\Delta(x, .)\|_2$$
$$\times \sqrt{\int_\Omega \left|\frac{1}{a} \exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1, \xi_2) - L_0(v^*)(\xi_1, \xi_2)\right|^2 d\xi_1 d\xi_2};$$

l'estimation suivante étant vérifiée(voir par exemple [8]) :

$$\|G_\Delta(x, .)\|_2 \leqslant \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left[2 + 4\ln(2)^2 + 4|x|(3 + \ln(4)) + \ln(16)\right.$$
$$- |x|^2 \left(6 + \ln\left(\frac{16}{|x|^2}\right)\right) \ln(|x|^2) + 2(-1 + |x|)(1 + \ln(4)$$
$$\left. + |x|(3 + \ln(4)) \ln(-1 + |x|)^2) - (-1 + |x|^2) \ln((-1 + |x|)^2)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient alors le résultat du corollaire.

Corollaire 2
Les conditions du théorème 1 étant toujours vérifiées, pour toute solution approchée $v^{(N)}(x)$ du problème (12)-(13) obtenue par la méthode de Ritz-Galerkin, on a l'estimation a postériori suivante :

(17)

$$|u(x_1,x_2) - u^{(N)}(x_1,x_2)| \leqslant \exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) \|G_{L_0}(x,.)\|_2 \times \sqrt{\int_\Omega \left|\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^{(N)})(\xi_1,\xi_2)\right|^2 d\xi_1 d\xi_2}$$

avec

$$\sqrt{\int_\Omega \left|\frac{1}{a}\exp\left(\frac{\xi_1 d + \xi_2 g}{2a}\right) f(\xi_1,\xi_2) - L_0(v^{(N)})(\xi_1,\xi_2)\right|^2 d\xi_1 d\xi_2} \longrightarrow 0 \text{ quand } N \longrightarrow \infty$$

Preuve
le résultat (17) est bien exactement celui de l'inégalité (16) pour la solution approchée $v^{(N)}$ de Ritz-Galerkin. D'après les travaux de O.A. Ladyshenskaja, il est connu que, pour des approximations $v^{(N)}$ obtenues comme dans la méthode de Ritz-Galerkin, le terme $\|F - L_0(v^{(N)})\|_2$ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini (voir [2]). Ainsi le corollaire est vérifié.

5 Conclusion

Nous sommes parvenus à établir de nouvelles approximations point par point de l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet homogène pour l'équation elliptique du second ordre à cœfficients constants

$$L(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + d\frac{\partial u}{\partial x_1} + g\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_0 u = f(x_1,x_2), \qquad (1)$$

dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont identiques. En effet grâce au changement de variable

$$u(x_1,x_2) = v(x_1,x_2)\exp\left(-\frac{x_1 d + x_2 g}{2a}\right) \qquad x = (x_1,x_2) \in \Omega$$

($b = 0$ *et* $a = c$), nous avons obtenu un problème auxiliaire équivalent au problème de Dirichlet homogène pour l'équation elliptique du second ordre à cœfficients constants (1). Les résultats du travail éffectué dans [8] appliqués à ce problème auxiliaire nous ont permis d'établir l'estimation a postériori point par point de l'erreur de la solution approchée du problème de Dirichlet homogène pour l'équation (1) lorsque, les racines de l'équation caractéristique sont les mêmes. La méthode que nous avons utilisé a l'avantage d'être plus réalisable que la construction des estimations sur la base de la méthode de projection orthogonale (voir [10]).

Références

[1] U.M. Berezanskiy, *Eigenfunction Expansion of self-adjoint operators. Publishing house* "Scientific thought", Kiew, 1965-p.798.

[2] O.A. Ladyshenskaja, *Boundary value problems of mathematical physics. Publishing house* "Science", Moscow, 1973. – p.408.

[3] N.J. Lehmann, *Fehlerschranken fur Naherungslsungen bei Differential gleichungen*, Numerische Mathematik 10 (1967), 261-288.

[4] S.G. Mahlin , *Concerning Ritz method*, Reports of Academy of Sciences the USSR v.56, n.2, 1947.

[5] V.P. Mihajlov, *Differential equations in partial derivatives.* – M. : Science, The head house publishing of physico-mathematica literature, 1976, pp.392.

[6] A.P. Prudnikov ,U.A Brychkov and O.I. Morichev, *Integrals and Series. IN 3 v. V.1. Primitive functions.* – thw second ed., revised. – M. : PHYSMAT-LIT, 2003, pp. 632.

[7] T.O. Shaposhnikova, *A priori estimates of variational methods error in banac spaces*, Journal of calculating Math. and math. physics, 1977, v. 17, n. 5.

[8] Kokou Tcharie, B. Some and N. Houkonnou, *Pointwise error estimates of varitionalmethods :Dirichlet's problem solution for Schrodinger's steady-state equation*,Pushpa publishing house,2007

[9] G.M. Vaynikko , *About similar operators*, Reports of the Academy of Sciences the USSR v.179, n. 5, 1968.

[10] M.I. Vishik , *The method of orthogonal projections for self-adjoint equations*, Reports of the Academy of Sciences the USSR v. 56, n.2, 1947.

[11] V.S. Vladmirov, *Equations of mathematical physics : Manual.* – thr fifth ed., complemented. – M. : Science, The head house publishing of physico-mathematica literature, 1988. –P.512.

[12] S.V. Zemskov, *The Error Estimate of the Approximate Solution of the Dirichlet Problem for Elloptical Partial Differential Equation, Computer Algebra in Scientific Computing* Proceedings of the Seventh International Workshops, Technische Universitt Mnchen, 2004.