

## CONCEPTION D'UN CORRECTEUR ADAPTATIF DU SYSTÈME DE POSITIONNEMENT D'UNE BALLE SUR UNE BARRE

Donatien NGANGA-KOUYA<sup>1\*</sup> et Francis A. OKOU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Département de génie mécanique, École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique du Gabon*

<sup>2</sup>*Département de génie électrique et informatique, Collège militaire royal du Canada, Kingston, Ontario, Canada*

(Reçu le 15 Décembre 2009, accepté le 30 Avril 2010)

---

\* Correspondance et tirés à part, e-mail : [ngad1109@yahoo.com](mailto:ngad1109@yahoo.com)

### RÉSUMÉ

Cet article propose un système de commande adaptative pour positionner une balle avec précision sur une barre. Les paramètres du système à commander sont inconnus et peuvent changer. Une approche par variables d'état de la méthode adaptative L1 est alors proposée pour la conception du système de commande. L'avantage de la nouvelle variante est que le système est facile à régler. Une simulation est effectuée pour attester de la performance du système de commande proposé. Les résultats montrent l'efficacité du système de commande et de la nouvelle commande L1 par variables d'état.

**Mots-clés :** *Modélisation, commande adaptative L1, fonction de transfert.*

### ABSTRACT

**Conception d'un Correcteur Adaptatif du Système de Positionnement d'une Balle sur une Barre.**

This article proposes an adaptive control device to position a ball with precision on a bar. The parameters of the system to be ordered are unknown and can change. An approach by variables of state of the adaptive method L1 is then proposed for the systems design of order. The advantage of the new alternative is that the system is easy to regulate. A simulation is carried out to attest performance of the control device suggested. The results show and system effectiveness of order new L1 the order by variables of state.

**Keywords :** *Modelisation, adaptive control L1, transfer fonction.*

## I - INTRODUCTION

Le système de positionnement d'une balle sur une barre fait partie de l'un des dispositifs les plus utilisés par les chercheurs en automatique pour évaluer la performance des nouvelles méthodes de conception des systèmes de commande. Une illustration de ce dispositif est donnée à la figure 1. L'attrait pour cet équipement est certainement dû au fait qu'il est aisé de vérifier visuellement l'efficacité des méthodes proposées. [1] utilise ce système pour valider la méthode de commande dite de la linéarisation entrée-sortie par approximation. Cette méthode permet d'étendre la linéarisation entrée-sortie conventionnelle aux systèmes dont le degré relatif n'est pas défini au point d'équilibre. Dans [2] la commande par mode de glissement incrémentale est utilisée pour concevoir un système de commande pour le système de positionnement de la balle sur la barre. Une nouvelle méthode de commande robuste et adaptative dite dissipative est employée pour stabiliser ce dispositif dans [3].

Ce présent article se propose d'utiliser le système de positionnement d'une balle sur une barre pour évaluer une nouvelle méthode de commande. Elle est relative à la commande adaptative L1 proposé dans [4]. Nous proposons une variante de la méthode basée sur la représentation par variables d'état. Une nouvelle expression de la loi d'adaptation est aussi proposée. L'avantage de notre approche est sa simplicité et l'efficacité de la loi d'adaptation. Contrairement à [4] qui a proposé d'utiliser un modèle de référence et un correcteur d'ordre 1 pour tout système d'ordre quelconque, ce article suggère un modèle de référence et un correcteur d'ordre égal au système à commander. Nous avons constaté par simulation qu'il est plus facile de stabiliser les systèmes en utilisant cette condition.

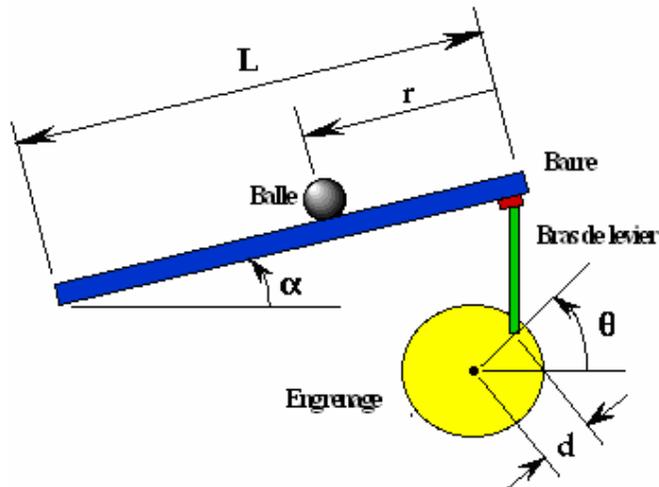
Le présent est organisé comme suit. La section II présente la modélisation du système par une représentation des variables d'état de la dynamique du mouvement de la balle et le modèle d'état du moteur CC qui fait déplacer la barre. Cette modélisation est essentielle car la méthode de conception qui est proposée est basée sur le modèle du système qui est à commander. La section III expose la méthode de conception proposée. Nous supposons que les paramètres du système sont inconnus lors de la conception. Par conséquent, le système de commande sera adaptatif. La section IV montre les résultats d'une simulation du système en boucle fermée. L'objectif est de montrer la capacité du correcteur à continuer de stabiliser le système quand ses paramètres changent. Enfin une conclusion met un terme à cet article.

## II - METHODOLOGIE

### II-1. Modélisation du système

Le système de positionnement d'une balle sur une barre qui est considéré dans cette étude est illustré à la *Figure 1*. Une balle est placée sur une barre

de longueur  $L$  sur laquelle elle peut rouler librement. Un bras de levier est attaché d'un côté à une extrémité de la barre et de l'autre côté à un moteur CC. Une rotation du moteur d'un angle  $\theta$  cause une rotation d'un angle  $\alpha$  au niveau de la barre. Si cet angle n'est plus 0 (barre horizontale) l'accélération de gravité cause une rotation de la balle le long de la barre



**Figure 1 :** Diagramme du système de positionnement de la balle sur une barre.

Il est aisé de déterminer le modèle dynamique du déplacement de la balle sur la barre en utilisant la méthode du Lagrangien. On suppose que la balle ne glisse pas et que le frottement avec la barre est négligeable. Il est aisé de montrer que pour de petits angles de rotation, la position de la balle est régie par l'équation dynamique suivante [5].

$$\left( \frac{J}{R^2} + m \right) \ddot{r} = mg\alpha \quad (1)$$

où  $M$ ,  $J$  et  $R$  sont respectivement la masse, l'inertie et le rayon de la balle.  $r$  et  $\alpha$  représentent la position de la balle sur la barre et l'inclinaison de la barre par rapport à l'horizontale, respectivement.  $g$  est l'accélération gravitationnelle. L'inclinaison de la barre et l'angle de rotation du moteur sont reliées par la relation algébrique suivante:

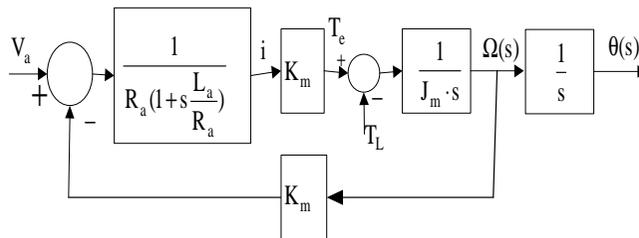
$$\alpha = \frac{d}{L} \theta \quad (2)$$

Où  $d$  et  $L$  représente le rayon de l'engrenage et la longueur de la barre. La fonction de transfert entre l'angle de rotation du moteur et la position de la

barre sur la barre avec les conditions initiales nulles s'obtient aisément en a partir de la transformée de Laplace des équations (1) et (2). Elle est de la forme :

$$\frac{r(s)}{\theta(s)} = \frac{mgd}{L\left(\frac{J}{R^2} + m\right)s^2} \quad (3)$$

Le schéma block d'un moteur à courant continu est illustré à la figure ci-dessous.



**Figure 2** : .Diagramme block du moteur CC.

Une tension d'armature  $V_a$  est appliquée aux bobinages du rotor de la machine qui a une résistance  $R_a$  et une inductance  $L_a$ . Il en résulte un courant  $i$ . Le bobinage placé dans un champ magnétique et il est traversée par un courant. Il est donc sujet à un couple moteur  $T_c$  qui est proportionnel au courant. Le rapport de proportionnalité est  $K_m$ . Ce couple fait tournée le rotor du moteur. Une tension induite se crée à l'intérieur de ce bobinage en rotation dans un champ magnétique. Cette tension est proportionnelle à la vitesse  $\Omega$ . Elle vient réduire la tension d'armature appliquée. La fonction de transfert du système moteur CC s'obtient en combinant les différents blocs de la **Figure 2**. On obtient une fonction de transfert de la forme :

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s\left\{K_m^2 + J_m R_a s\left(1 + \frac{L_a}{R_a} s\right)\right\}} \quad (4)$$

Lorsque la constante de temps électrique est négligée par rapport à la constante de temps mécanique (c'est-à-dire quand  $L_a$  est supposée nulle), cette fonction de transfert du moteur CC se réduit à :

$$\frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{1/K_m}{s\left(1 + \frac{J_m R_a}{K_m^2} s\right)} \quad (5)$$

Ainsi. La fonction de transfert entre la position de la balle et la tension appliquée au moteur est :

$$\frac{r(s)}{V_a(s)} = \frac{K}{s^3(1 + \tau s)} \quad (6)$$

où

$$\tau = \frac{J_m R_a}{K_m^2} \quad \text{et} \quad K = \frac{mgR^2}{K_m L(J + mR^2)}$$

Le système à commander est donc représentée par une fonction de transfert d'ordre 3. Ce modèle sera considéré à la section suivante pour la conception du correcteur.

## II-2. Conception du Correcteur

L'objectif de cette section est de proposer un système de commande capable d'envoyer la barre d'une position initiale à une autre position donnée sur la barre. Nous allons supposer pour cette conception que les paramètres  $K$  et  $\tau$  du modèle qui représente le système à commander sont inconnus durant la conception. Cette supposition revient à prendre en compte par exemple les cas où la balle ou le moteur changeraient et qu'on aimerait garder le même système de commande. Nous allons représenter le système à commander sous la forme d'une représentation d'état comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bv_a(t) \\ r(t) &= Cx \end{aligned} \quad (7)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\tau & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K/\tau \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T$$

On désire concevoir le correcteur de façon à ce que le système en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence  $M(s)$  d'équation dynamique

$$r(s) = M(s)r_{\text{ref}}(s) \quad (8)$$

$$M(s) = \frac{25\omega_n^4}{(s^2 + 10\zeta\omega_n s + 25\omega_n^2)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

où

$r_{\text{ref}}(s)$  est la position désirée de la balle sur la barre.

Ce modèle de référence représente les spécifications de conception qui portent en général sur un coefficient d'amortissement désiré  $\zeta$  et une fréquence naturelle désirée  $\omega_n$ . Une représentation d'état du modèle de référence est le suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r r_{\text{ref}}(t) \\ r(t) &= C_r x_r \end{aligned} \quad (9)$$

Où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9\omega_n^4 \end{bmatrix} \quad C_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T = C$$

Les paragraphes qui suivent permettront de déduire la structure du système de commande. Pour ce faire, on montre que le système à commander peut être réécrit sous la forme du modèle de référence avec une perturbation à l'entrée. En effet,

$$\dot{x} = Ax + Bv_a(t) \quad (11)$$

En introduisant les paramètres du modèle de référence, on obtient une équation de la forme :

$$\dot{x} = A_r x + B_r v_a(t) + (A - A_r)x + (B - B_r)v_a(t) \quad (12)$$

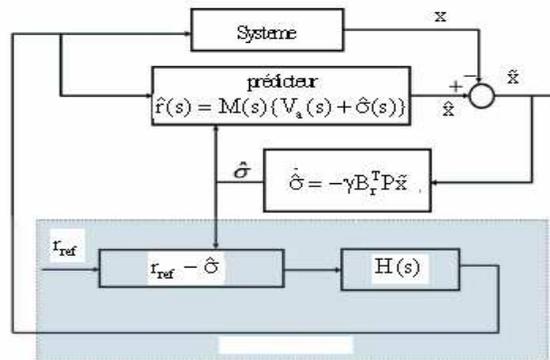
Cette dernière équation peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_r x + B_r [v_a(t) + \sigma(t)] \\ y &= C_r x \end{aligned} \quad (13)$$

avec

$$\sigma(t) = B_r^T (B_r B_r^T)^{-1} \{ (A - A_r)x + (B - B_r)v_a(t) \}$$

On remarque aisément que le système et son modèle référence sont presque semblable excepté l'existence de la perturbation  $\sigma(t)$ . L'idée de la méthode de commande est d'estimer cette perturbation afin d'annuler son effet. La structure de commande suivante est donc proposée à cet effet.



**Figure 3 :** Structure du système en chaîne fermée.

La structure proposée utilise un prédicateur d'équation dynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_r \hat{x} + B_r [v_a(t) + \hat{\sigma}(t)] \\ \hat{y} &= C_r \hat{x} \end{aligned} \tag{14}$$

L'estimation de la perturbation qui est notée par  $\hat{\sigma}(t)$  sera déterminée pour faire converger les variables d'état du prédicateur vers celles du système à commander.

L'équation de la sortie du correcteur sera choisie de la forme :

$$V_a(s) = H_c(s) \{r_{ref}(s) - \hat{\sigma}(s)\} \tag{15}$$

Avec

$$H_c(s) = H_{c1} * H_{c2}$$

$$H_{c1} = \frac{30\omega_n / \zeta s + (30\omega_n)^2}{(s^2 + 60\zeta\omega_n s + (30\omega_n)^2)}$$

$$H_{c2} = \frac{90\omega_n / \zeta s + (90\omega_n)^2}{(s^2 + 180\zeta\omega_n s + (90\omega_n)^2)}$$

Il convient de discuter maintenant de la loi d'estimation de la perturbation  $\sigma(t)$ . Cette loi sera obtenue de façon que le système reste stable. Rappelons qu'elle sera tel qu'elle fait converger les variables d'état du prédicateur vers celles du système à commander. La dynamique de l'erreur entre ses deux variables d'état est régie par l'équation suivante.

$$\dot{\tilde{x}} = A_r \tilde{x} + B_r \tilde{\sigma}(t) \quad (16)$$

avec  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  et  $\tilde{\sigma}(t) = \hat{\sigma} - \sigma$ .

Cette dernière s'obtient en faisant la différence entre les équations (14) et (13). Rappelons que la matrice  $A_r$  est celle du modèle de référence qui est un système stable. Par conséquent, on peut dire qu'il existe une matrice définie positive  $P$  qui est solution de l'équation suivante :

$$A_r^T P + P A_r = -I \quad (17)$$

$I$  est la matrice identité.

Considérons maintenant une fonction de Lyapunov candidate pour la dynamique de l'erreur (16) et celle de l'estimation de la perturbation de la forme :

$$V = \tilde{x}^T P \tilde{x} + \gamma^{-1} \tilde{\sigma}^2, \quad \gamma > 0 \quad (18)$$

Cette fonction candidate est définie positive. La loi d'estimation de la perturbation sera déterminée de façon à ce que la dérivée de cette fonction candidate de Lyapunov soit définie semi-négative afin d'assurer la stabilité du système. La dérivée de  $V$  est de la forme :

$$\dot{V} = -\tilde{x}^T \tilde{x} + 2\tilde{\sigma}\{B_r^T P \tilde{x} + \gamma^{-1} \dot{\tilde{\sigma}}\} \quad (19)$$

Nous proposons d'utiliser la loi d'adaptation avec projection ci-dessous

$$\dot{\hat{\sigma}} = -\gamma B_r^T P \tilde{x} \quad (20)$$

Il est aisé de montrer que la dérivée de  $V$  vérifie alors la relation suivante

$$\dot{V} \leq -V + \gamma^{-1} \varepsilon \quad (21)$$

Pour un certain  $\varepsilon$  positif.

Une valeur de gamma suffisamment grande permettrait alors de faire converger les erreurs de prédiction et d'estimation proche de zéro. La section suivante présente les résultats d'une simulation pour attester de l'efficacité de la méthode.

### III – RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### Simulation

Considérons les valeurs de la **Tableau 1** pour le système illustré à la **Figure 1**. Les paramètres du moteur CC sont aussi donnés dans la table. Pour évaluer la performance du système de commande, on se propose de positionner la balle à 0.9 m du bord droit de la barre ensuite de la repositionner à 0.4 m. La table II donne les valeurs des paramètres du système de commande.

**Tableau 1** : Paramètres du système à commander

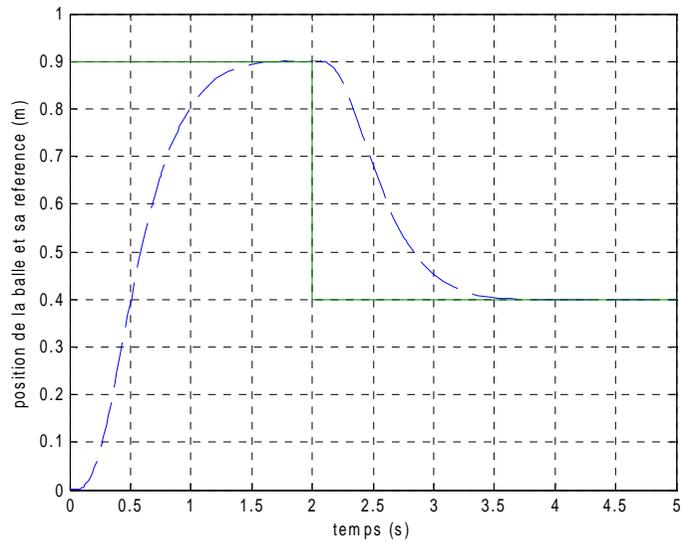
M	0.11 Kg
d	0.03 m
R	0.015 m
L	1m
J	$9.99 \cdot 10^{-6} \text{ Kgm}^2$
$J_m$	$7.51 \cdot 10^{-6} \text{ Kgm}^2$
$K_m$	0.0274 Nm/A
$R_a$	4 $\Omega$
$L_a$	$2.75 \cdot 10^{-6} \text{ H}$

Les figures ci-dessous illustrent la position de la barre en fonction du temps, la sortie du prédicteur, l'estimation de la perturbation et l'effort de commande.

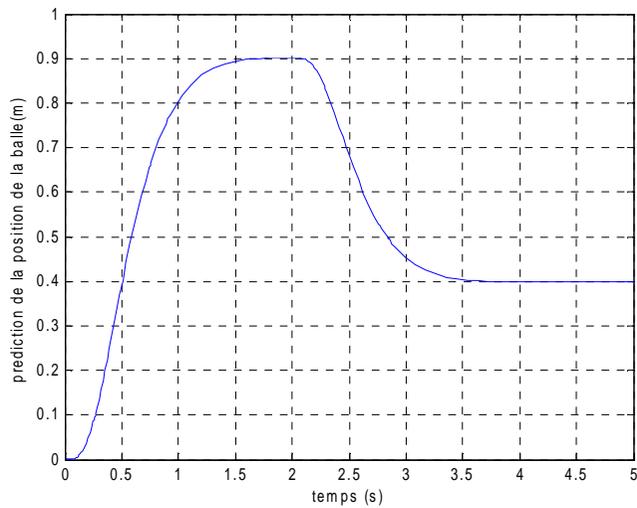
**Tableau 2**: Paramètres du correcteur

$\omega_n$	2 rad/s
Z	0.9
$\Gamma$	500

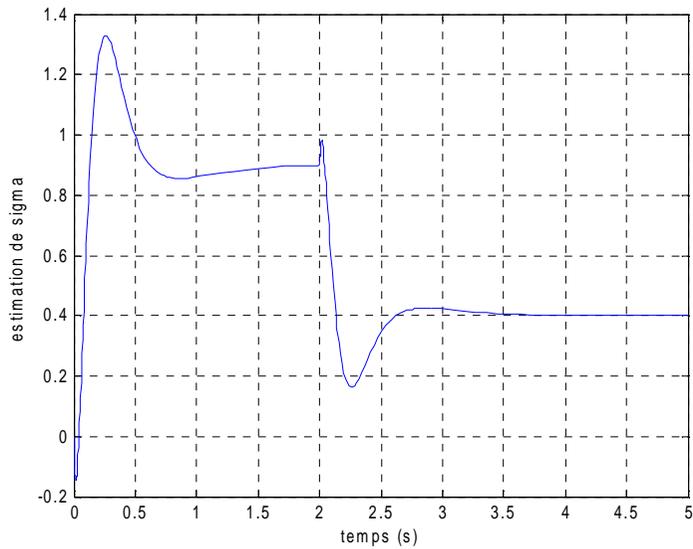
On constate que le système de commande est capable de positionner la balle à sa position désirée en 1.5 secondes sans dépassement. On note aussi que la prédiction de la position de la balle semblable à la vraie mesure de la position de la balle. Ce qui démontre l'efficacité du prédicteur qui est proposée. L'estimation de la perturbation ainsi que l'effort de commande sont bornées. On constate aussi que le système de commande fonction aussi très bien quand il s'agit de réduire la position de la balle.



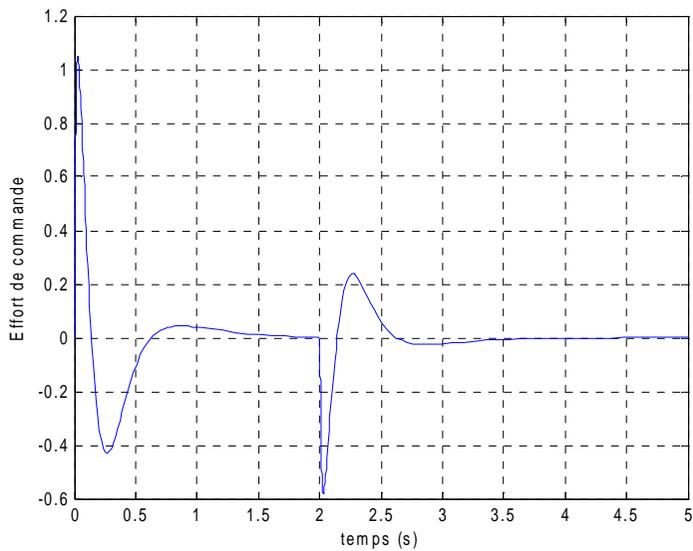
**Figure. 4 a:** *la position de balle et sa référence : expérience 1*



**Figure 5 :** *la prédiction de la position de la balle : expérience 1*



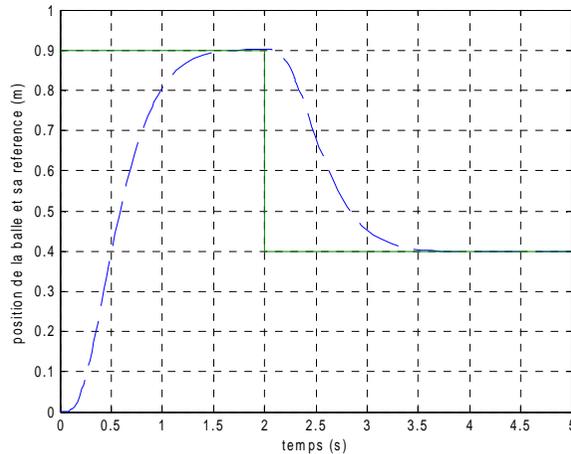
**Figure 6 :** *Le paramètre estimé : expérience 1*



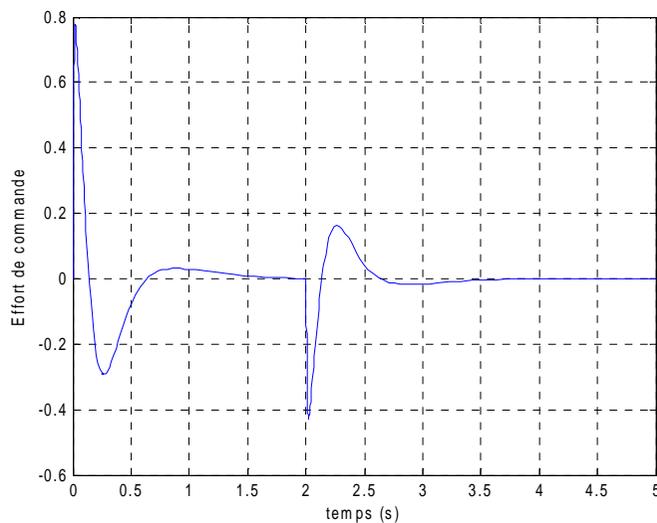
**Figure 7a :** *Effort de commande : expérience 1*

On effectue la même expérience mais cette fois avec une masse 10 fois plus lourde. Les deux figures ci-dessous illustrent l'évolution dans le temps de la position de la balle et l'effort de commande. On constate encore que la balle

se positionne efficacement à ses positions désirées dans le même temps. L'effort de commande est plus faible que précédemment avec une masse plus lourde. Cela est assez normal car le poids de la barre contribue au déplacement. Par conséquent, on devra fournir moins d'effort pour la faire bouger. Dans cette deuxième expérience, le système de commande ignorait aussi la masse de la balle.



**Figure 4b :** la position de balle et sa référence : expérience 2



**Figure 7b :** Effort de commande : expérience 2

#### IV - CONCLUSION

Un système de commande adaptative de positionnement d'une balle sur une barre est proposé. Le système contient aussi un moteur à courant continu. La méthode proposée s'inspire de la commande adaptative L1 de [4]. Nous proposons une variante basée sur la représentation d'état. La méthode proposée utilise une fonction de transfert du prédicteur et une fonction de transfert du correcteur d'ordre égal à celle du système à commande. Son principal avantage dans notre approche est que le système en chaîne fermée est plus facile à stabiliser. Les résultats de la simulation démontrent l'efficacité de cette nouvelle approche de la commande adaptative L1.

#### RÉFÉRENCES

- [1] - HAUSER J., SASTRY S., and KOKOTOVIC P., 'Nonlinear Control Via Input Output Linearization: The ball and Beam example', *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 37, No. 3, (March 1992) 392-398
- [2] - HIRSCHORN R. M., 'Incremental Sliding Mode Control of the Ball and Beam', *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 47, No. 10, 1696-1700
- [3] - YANG J., WANG Z.-H., 'Adaptive Robust Dissipative design on stability control for ball and beam system ' The 2<sup>nd</sup> international conference on computer and automation engineering 2010, vol. 4., (February 2010.) 68-71
- [4] - CAO C., HOVAKIMYAN N., 'L1 Adaptive Output Feedback Controller for Systems with Unknown Dimension', *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 53, No. 3, (April 2008).815-821
- [5] - YU W., 'NONLINEAR PD Regulation for ball and Beam System', *International Journal of Electrical Engineering Education*, Vol. 46, No. 1, (2008) 59-73