

UNE APPROCHE PAR RETOUR D'ÉTAT D'UNE LOI DE COMMANDE NON LINÉAIRE POUR UN ROBOT MOBILE AUTONOME

Donatien NGANGA-KOUYA

*Laboratoire de Recherche en Technologie des Systèmes (LARTESY)
Département génie mécanique, ENSET Libreville, B. P 3989 Libreville, Gabon.*

(Reçu le 21 Janvier 2010, accepté le 13 Mai 2010)

* Correspondance et tirés à part, e-mail : ngad1109@yahoo.com

RÉSUMÉ

Cet article présente une commande par retour d'état non linéaire pouvant stabiliser le suivi de trajectoire d'un robot mobile à quatre roues. La modélisation du robot est basée sur la mise en place de deux types de représentation. Le premier type ressort la matrice dynamique des positions-orientation. Le deuxième type concerne les matrices du modèle polaire et du modèle cinématique.

La commande par retour d'état est ensuite mise en place par la technique du retour d'état. Des fonctions candidates de Lyapunov sont utilisées pour justifier la stabilité du système. Une dynamique de l'erreur est enfin établie pour la commande respectivement sur des trajectoires circulaire et sinusoïdale.

Mots-clés : *Commande, Robot Mobile, Retour d'état*

ABSTRACT

An approach by return of stats of state no linear control law for an autonomous mobile robot

This paper presents a control by nonlinear return of state which can stabilize the follow of trajectory of a mobile robot with four wheels. The modeling of the robot is based on the installation of two types of representation. The first type brings out the dynamic matrix of the position-orientation. The second type relates to the matrices of the polar model and the kinematic model.

The control by return of state is then installation by the technique of the return of state. Functions candidates of Lyapunov are used to justify the

stability of the system. A dynamics of the error is finally established for the order respectively on trajectories circular and sinusoidal.

Keywords : *Control, Robot Mobil, feedback*

I - INTRODUCTION

L'utilité des robots mobiles sont à présent, bien justifiée par les références [1,2]. Le nombre de récentes contributions démontre le haut niveau des activités de recherches dans ce domaine.

Dans [3], une nouvelle règle de commande pour déterminer les vitesses linéaires et rotationnelles d'un véhicule est présentée. L'étude est basée sur l'hypothèse énoncée ci-dessus qu'une « traction de vitesse parfaite » est atteinte. La référence [4] écarte la première hypothèse et propose une structure de commande qui réalise l'intégration d'une commande cinématique un réseau neural de commande de rotation informatisé. Dans [5], une commande robuste de synthèse d'un véhicule à quatre roues motrices (4ws) est conçu avec des fonctions optimisées et robustes afin d'atténuer les perturbations externes alors que le taux de mouvements est choisi comme le seul signal de retour. La référence [6] étudie les robustes directions et tractions des véhicules à quatre roues motrices avec vitesse, une masse, moment d'inertie, et interaction motrice variable. Une commande de découplage d'entrée et de sortie, ainsi que le schéma de commande robuste est proposée. La commande d'infinité H et les gains de l'observateur sont obtenus en résolvant deux nouvelles équations algébriques de Riccati. Dans la plupart des contributions précédentes, le robot mobile est représenté soit par les équations cinématiques soit par un modèle linéarisé quand les équations dynamiques sont utilisées.

Cet article introduit une innovation sur le problème de commande de traction d'un robot mobile. L'idée fondamentale est de diviser ce problème délicat en deux (2) problèmes primordiaux. Cette idée est en effet, le point culminant de notre étude. Elle est motivée par l'observation que beaucoup de non-linéarités d'un modèle de robot apparaissent sous forme d'action d'équations. Ainsi, une méthodologie d'étude basée sur le modèle est proposée. Le modèle hautement non-linéaire d'un robot mobile est divisé en deux parties. Un modèle espace état dans lequel trois entrées de commande intermédiaire sont expressément introduits, et trois équations algébriques non-linéaires impliquant les entrées de commande véritables et intermédiaires. D'abord, une méthodologie rétrospective [7] est utilisée pour synthétiser les équations d'entrée intermédiaire qui résolvent le problème de traction de trajectoire.

Ensuite, la méthode Newton Raphson est utilisée pour résoudre les équations algébriques non-linéaires afin s'obtenir les véritables entrées de commandes. L'article est organisé de la manière suivante. Le modèle d'état du robot mobile est présenté en section II. L'objectif de l'étude est clairement exposé à la section III. La section IV représente la méthode backstepping de l'étude de la commande utilisée pour obtenir les équations intermédiaires d'entrée. Des simulations sont faites et les résultats sont présentés en section V. L'article se termine par une conclusion.

II - METHODOLOGIE

II-1. Le modèle du robot mobile

Le robot mobile à quatre (4) roues étudié dans cet article, est illustré à la figure 1 suivant un système d'axes fixe x_b et y_b . Ce système d'axes ressort les positions de déplacement x et y ainsi que l'orientation θ du robot mobile autour de l'axe z .

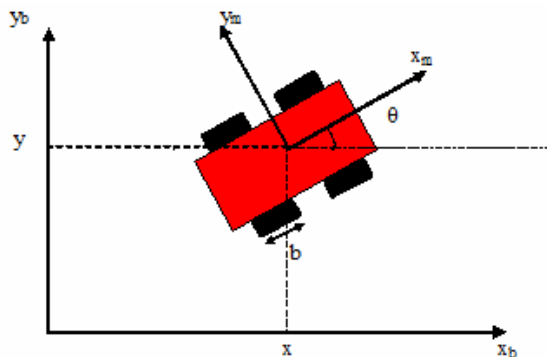


Fig. 1 Robot Mobile à quatre roues

II-2. Modélisation du robot

Les positions et l'orientation du robot mobile donné à la figure 1 peuvent être représentées par le système matriciel ci-dessous :

$$\chi = [x \ y \ \theta]^T \quad (1)$$

où χ est le vecteur de coordonnées généralisées, x et y les positions du robot mobile et θ l'orientation du robot mobile, l'ensemble par rapport au repère fixe.

La mesure relative au repère fixe de la vitesse du mobile est représentée par :

$$\dot{\chi} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T \quad (2)$$

Avec $\dot{\chi}$ le vecteur des vitesses généralisées, \dot{x} , \dot{y} et $\dot{\theta}$ représentent respectivement les vitesses du robot mobile et la vitesse angulaire du robot mobile, l'ensemble par rapport au repère fixe.

Il est toutefois utile de préciser que l'équation la plus utilisée pour la commande cinématique des robots mobile par rapport à un système d'axes à exemple 0 est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les variables v et ω représentent respectivement la vitesse longitudinal du centre de masse et la vitesse angulaire du centre de masse.

De (1), découle la représentation des équations suivantes décrite par les vitesses dans le système de référence dynamique et cinématique du robot mobile en mouvement de rotation de l'angle α autour de l'axe z .

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_m \\ \dot{y}_m \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5)$$

En considérant le principe des contraintes nonholonomiques, nous avons :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (6)$$

La représentation polaire quant à elle peut être abordée suivant la **Figure 2** :

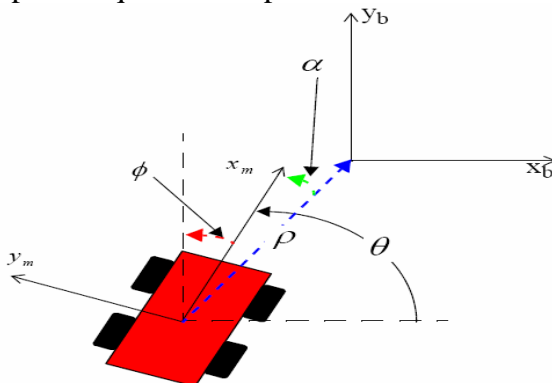


Figure 2 : Robot Mobile en système d'articulations polaires

De la **Figure 2**, découlent les données ci-dessous :

$$\rho = \sqrt{x_m^2 + y_m^2} \tag{7a}$$

$$\alpha = \text{atan2}(y_m - x_m) - \theta \tag{7b}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \theta \tag{8}$$

Avec ρ α ϕ qui représentent respectivement.

De cette représentation polaire, découle la dynamique ci-dessous

$$\dot{\rho} = -v_x \cos\alpha \tag{9}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\rho} v_x - \omega \tag{10}$$

$$\dot{\phi} = -\omega \tag{11}$$

avec $\alpha(0) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

II-3. Commande par retour d'état

La commande par retour d'état est abordée par le schéma de la **Figure 3**.

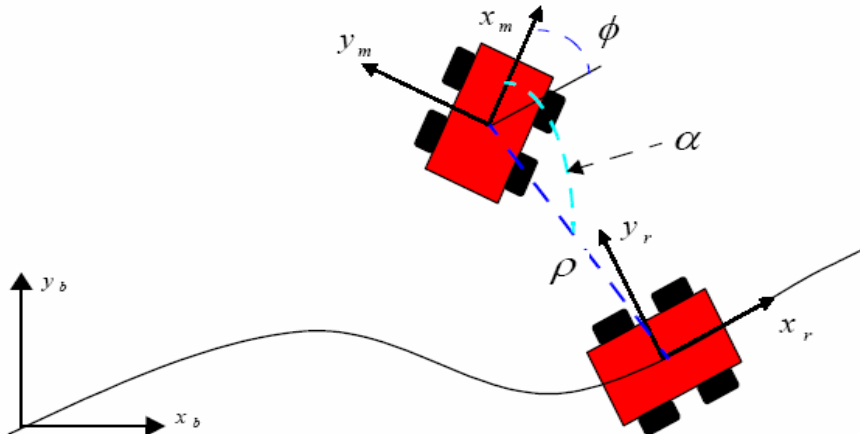


Figure 3 : Trajectoire du robot mobile

$$\theta_r = \text{atan2}\left[\frac{d}{dt}(y_r - y), \frac{d}{dt}(x_r - x)\right] \quad (12)$$

$$v_r = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (13)$$

Le modèle dans l'espace d'état est donné par :

de l'expression $\dot{\rho} = -v_x \cos\alpha$ on pose :

$$x_1 = \rho \quad (14)$$

de l'expression $\dot{\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\rho} v_x - \omega$ on pose :

$$x_2 = \alpha \quad (15)$$

de l'expression $\dot{\phi} = -\omega$ on pose :

$$x_3 = \phi \quad (16)$$

de (13), (14) et (15) avec le principe des dérivées premières on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u_1 \cos x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{u_1}{x_1} \sin x_2 - u_2 \\ \dot{x}_3 = u_2 \end{cases} \quad (17)$$

II-3-1. Stabilité du système

Nous allons démontrer la stabilité du système en utilisant une fonction candidate de Lyapunov. Cette fonction une fois dérivée et mise en relation avec le modèle d'état doit donner un résultat négative.

Ainsi, considérons la fonction candidate de Lyapunov suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (18)$$

En dérivant cette fonction on obtient :

$$\dot{V}(x) = x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 \quad (19)$$

En remplaçant les différentes expressions de (17) dans (18), on a :

$$\dot{V}(x) = x_1(-u_1 \cos x_2 + x_2 \left(\frac{u_1}{x_1} \sin x_2 - u_2\right) + x_3 u_2) \tag{20}$$

Après le développement de (19), on obtient :

$$\dot{V}(x) = u_1 \left(\frac{x_2^2}{x_1} \sin x_2 - x_1 \cos x_2\right) + u_2(-x_3 - x_2) \tag{21}$$

De (21), nous pouvons ressortir, les expressions des commandes u_1 et u_2 pouvant justifier la stabilité du système. Ainsi, on aura :

$$u_1 = -k_1 \left(\frac{x_2^2}{x_1} \sin x_2 - x_1 \cos x_2\right) \tag{22}$$

$$u_2 = -k_2(-x_3 - x_2) \tag{23}$$

D'où la nouvelle expression de (21) par substitution.

$$\dot{V}(x) = -k_1 \left(\frac{x_2^2}{x_1} \sin x_2 - x_1 \cos x_2\right) - k_2(-x_3 - x_2) < 0 \tag{24}$$

A partir de (24), nous démontrant aisément la stabilité du système.

II-3-2. Dynamique de l'erreur

(3) et (4) peuvent être réorganisés de la façon suivante en prenant en compte les trois erreurs et en s'appuyant sur la **Figure 3** :

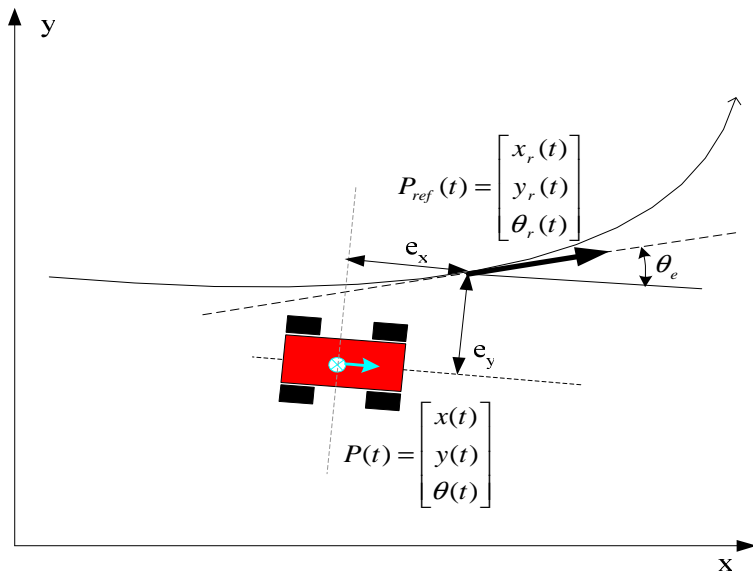


Figure 3 : Dynamique des erreurs

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} \quad (25)$$

Avec

$$\theta_e = e_\theta = \theta_r - \theta \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r \\ \dot{y}_r \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_r & 0 \\ \sin \theta_r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (27)$$

Calculons la dérivée de la première expression de la dynamique de l'erreur donnée par (25) :

$$\dot{e}_x = (\dot{x}_r - x)\cos\theta + (\dot{y}_r - y)\sin\theta - (x_r - x)\dot{\theta}_r\sin\theta + (y_r - y)\dot{\theta}_r\cos\theta \quad (28)$$

En développant (28) et en considérant les relations trigonométriques d'une part et les contraintes nonholomiques donnée par (5) d'autre part, on trouve :

$$\dot{e}_x = e_y\omega - v + \dot{x}_r\cos\theta + \dot{y}_r\sin\theta \quad (28a)$$

(28a) peut être réorganisée en considérant (26) :

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= e_y\omega - v + \dot{x}_r\cos(\theta_r - \theta_e) + \dot{y}_r\sin(\theta_r - \theta_e) \\ &= e_y\omega - v + \dot{x}_r(\cos\theta_r\cos\theta_e + \sin\theta_r\sin\theta_e) + \dot{y}_r(\sin\theta_r\cos\theta_e - \cos\theta_r\sin\theta_e) \\ &= e_y\omega - v + (\dot{x}_r\cos\theta_r + \dot{y}_r\sin\theta_r)\cos\theta_e + (\dot{x}_r\sin\theta_r - \dot{y}_r\cos\theta_r)\sin\theta_e \\ &= e_y\omega - v + v_r\cos\theta_e \end{aligned} \quad (28b)$$

De même, en calculons la dérivée de la deuxième et la troisième expressions de la dynamique de l'erreur donnée par (25) et en appliquant la logique des calculs précédents, on trouve respectivement:

$$\dot{e}_y = -e_x\omega + v_r\sin\theta_e \quad (29)$$

$$\dot{e}_\theta = -\omega_r \quad (30)$$

(28b), (29) et (30) sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} e_y \\ -e_x \\ -1 \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} v_r \cos e_\theta \\ v_r \sin e_\theta \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (31)$$

Comme précédemment, nous proposons une fonction candidate de Lyapunov donnée ci-dessous :

$$V = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2) + \frac{1 - \cos e_\theta}{K_y} \quad (32)$$

De cette fonction candidate découle les lois de commande suivante :

$$v_f = v_r \cos e_\theta + K_x e_x \quad (33)$$

$$\omega_f = \omega_r + V_r K_y e_y + K_\theta \sin e_\theta \quad (34)$$

III – RÉSULTATS ET DISCUSSION

III-1. SIMULATION

Les simulations sont à présent faites pour évaluer l'effectivité de la méthode d'étude proposée. Les paramètres du robot mobile à deux roues sont donnés au **Tableau 1**. Ce véhicule est illustré à la **Figure 1**. Le robot est utilisé pour suivre le schéma circulaire représenté par les équations suivantes :

$$\ddot{x}_{\text{ref}} = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right), \quad \dot{x}_{\text{ref}}(t=0) = x_{\text{ref}}(t=0) = 0$$

$$\ddot{y}_{\text{ref}} = -\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{10}t\right), \quad \dot{y}_{\text{ref}}(t=0) = \frac{\pi}{10}, \quad y_{\text{ref}}(t=0) = 0$$

Les gains du contrôleur sont donnés dans le **Tableau 2**. La **Figure 4** illustre la performance de la traction de la commande. La position initiale du robot est fixée à $x = 0.1\text{m}$, $y = 0$ et l'angle $\theta = -15^\circ$. On peut voir qu'une traction d'une parfaite suivie est atteinte. Le robot est capable de suivre la trajectoire désirée. La **Figure 5** montre la vitesse du véhicule. Après le début de la trajectoire, une vitesse état de près 0.3 m/s est atteinte à $t = 0.2$ second. Les **Figure 6** et **7** montrent, d'autres variables états du système. Toutes convergent vers leur valeur état après une seconde. Les sorties de commande

sont illustrées aux **Figures 8a et 8b**. Une fois encore, ces signaux sont tous bornés et leurs valeurs état sont réalistes.

Tableau 1 : Paramètres du Model

$M = 1\text{kg}$	$L^r = 2\text{m}$	$\mu_r = 1$
$J = 1\text{N.m}$	$L^f = 2\text{m}$	$\mu_f = 1$

Tableau 2 : gains du Contrôleur

$k_1 = 5$	$k_2 = 5$	$k_3 = 10$
$k_4 = 100$	$k_5 = 100$	$k_6 = 10$
$k_7 = 100$	$k_8 = 100$	$k_9 = 10$

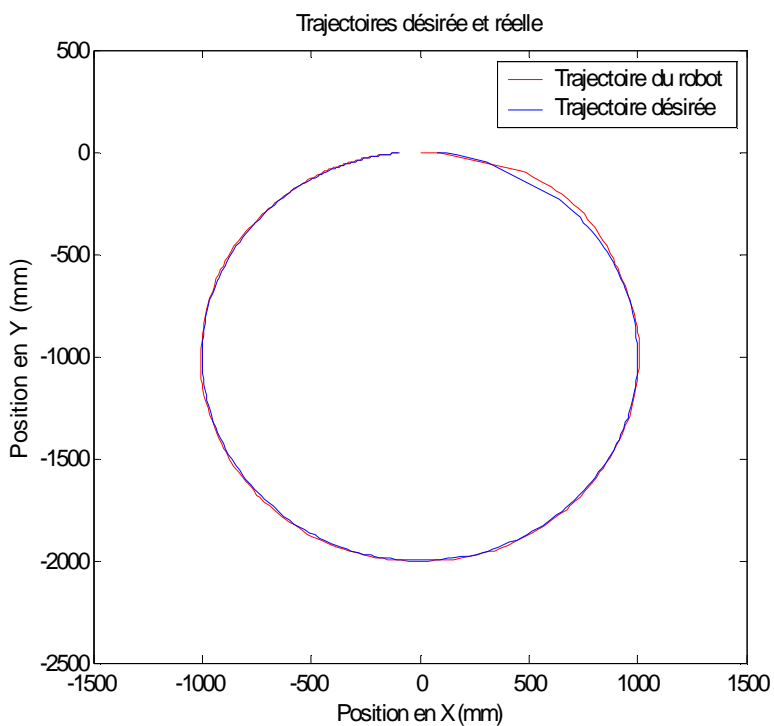


Figure 4 : *Mouvement de robot dans le plan x/y : tire-ligne : trajectoire réelle, ligne continue : trajectoire désirée.*

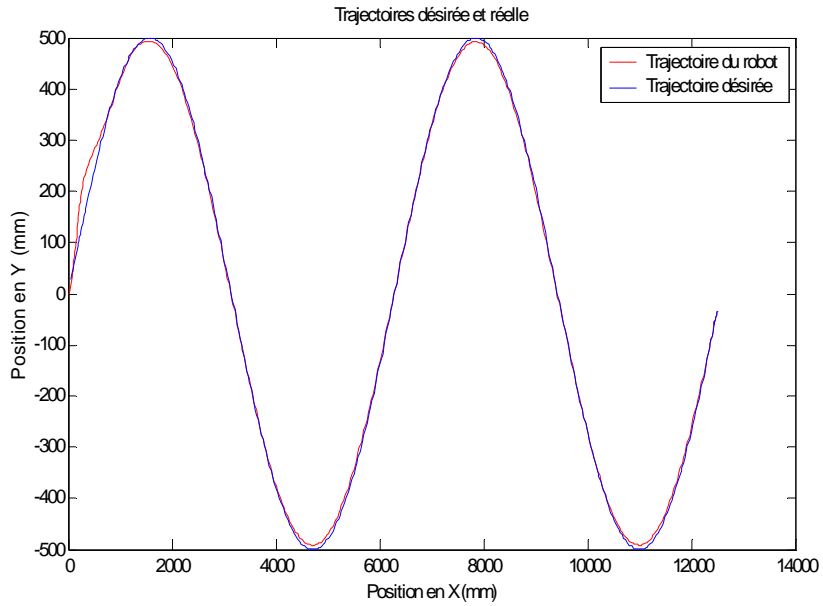


Figure 5: Vitesse V

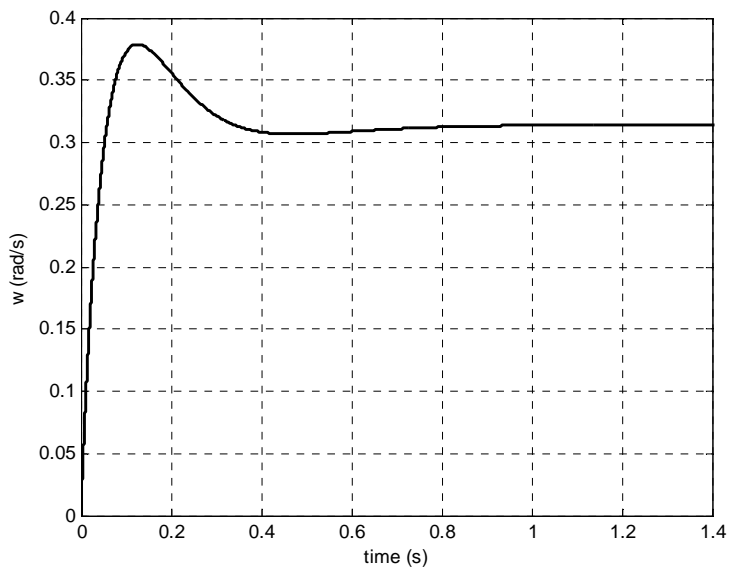
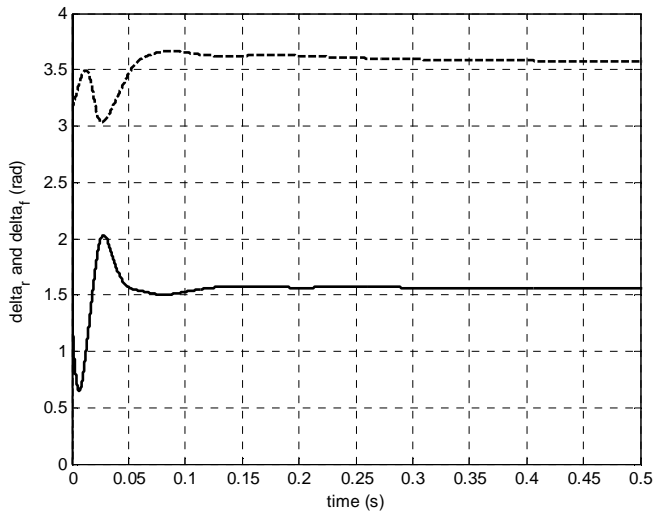


Figure 7: vitesse angulaire



(a)

V - CONCLUSION

Une nouvelle approche est proposée pour désigner une commande de traction de trajectoire pour un robot mobile à deux roues. Elle combine la méthode d'étude de la commande backstepping non-linéaire et celle de la méthode de Newton-Raphson, une méthode de résolution d'une équation algébrique non-linéaire.

Les simulations sont utilisées pour évaluer la performance de la commande. Les résultats démontrent l'efficacité de la nouvelle méthode d'étude de commande.

La nouvelle commande est capable de suivre un schéma circulaire parfaite. Les travaux à venir soulèveront le même problème de traction quand les paramètres du robot peuvent changer ou sont inconnus ce qui fera ressortir l'approche adaptative.

RÉFÉRENCES

- [1] - BISHOP R., 'Intelligent vehicle applications worldwide', *IEEE Intelligent Systems and Their Applications*, vol 15, no. 1, -(Feb. 2000.)78 – 81,
- [2] - GARCIA, E.; JIMENEZ, M.A.; DE SANTOS, P.G.; ARMADA, M., 'The evolution of robotics research'. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, vol 14, no. 1 (March 2007.) 90 – 103,

- [3] - KANAYAMA Y., KIMURA Y., MIYAZAKI F., and NOGICHI T., 'A Stable Tracking Control Method for a Autonomous Mobile Robot', *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol.1(May 1990.)384 – 389, 13-18
- [4] - FIERRO, R.; LEWIS, F.L., 'Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks' *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol 9, no. 4, (July 1998.)589 – 600,
- [5] - YIN G., CHEN N., and LI P., 'Improving Handling Stability Performance of Four-Wheel Steering Vehicle via μ -Synthesis Robust Control', *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 56, no. 5 (Sep. 2007).2432-2439,
- [6] - JIA Y., 'Robust control with decoupling performance for steering and traction of 4WS vehicles under velocity-varying motion'; *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, no. 3, (May 2000.) 554 – 569,
- [7] - M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULOS, and P. V. KOKOTOVIC, *Nonlinear and Adaptive Control Design.* , Wiley, New York, 1995.
- [8] - M. W. Hirsch and S. Smale, "On algorithms for solving $f(x) = 0$," *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 32, (1979) 281–312,
- [9] - Jurgen Ackermann, *Robust Control: Systems with Uncertain Physical Parameters* , Springer-Verlag, London Limited, (1993).